Un carré magique 3x3 composé du nombre 1 et de 8 carrés impairs différents ne peut exister.

Par Jean-Claude Rosa , décembre 2006 (révisé en avril 2007).

Considérons un carré magique 3x3 composé de 8 carrés impairs différents et du nombre 1. .
On peut présenter ce carré magique de la façon suivante :

$P1^2$	1	$P3^2$
$P4^2$	$P5^2$	$P6^2$
$P7^2$	$P8^2$	$P9^2$

(En effet , dans un carré magique 3x3, composé de 9 nombres différents, le plus petit ne peut être ni au centre ni dans un angle)

La somme magique d'un tel carré étant égale à $3P5^2$ nous pouvons
poser : $P7^2 = P5^2 - K1$; $P3^2 = P5^2 + K1$
$P9^2 = P5^2 - K3$; $P1^2 = P5^2 + K3$
$P4^2 = P5^2 - (K3-K1)$; $P6^2 = P5^2 + (K3 - K1)$
$1 = P5^2 - (K1+K3)$; $P8^2 = P5^2 + (K1+ K3)$
On peut toujours supposer $K1<K3$ et donc $P9<P7$

A partir de ces égalités nous pouvons écrire , en particulier, les 4 égalités suivantes :

$$2\,P9^2 = 1^2 + P4^2 \quad (1)$$
$$2\,P7^2 = 1^2 + P6^2 \quad (2)$$
$$2\,P5^2 = 1^2 + P8^2 \quad (3)$$
$$P5^2 - P7^2 = P9^2 - 1^2 \quad (4)$$

Deux égalités de la forme ; $h^2 - K= X^2$ et $h^2 + K= Y^2$ ($X<Y$)
conduisent à l'égalité : $2h^2 = X^2 + Y^2$. On peut toujours poser $X=q-p$; $Y=q+p$; $p<q$
on obtient l'égalité : $h^2 = p^2 + q^2$ et par suite $K=2pq$
Ainsi h est l'hypoténuse d'un triangle rectangle pythagorique tel que la différence entre les deux côtés de l'angle droit est égale à X et la somme égale à Y.
A partir des égalités (1),(2) et (3) nous pouvons donc conclure que P9, P7 et P5 sont les hypoténuses de 3 triangles pythagoriques tels que pour chacun d'eux la différence entre les côtés de l'angle droit est égale à 1.
Les nombres P9,P7,P5 sont donc de la forme :

$$P^2 = X^2 + (X+1)^2$$

En faisant varier X on peut calculer les 6 premières valeurs de P :

i	P_i	X_i
0	1	0
1	5	3
2	29	20
3	169	119
4	985	696
5	5741	4059

Comment prolonger facilement la suite des P_i ?(calculer P_6 par exemple)
. Posons : $P_3=aP_2-bP_1$ et $P_4=aP_3-bP_2$.
En utilisant les valeurs connues de P_1,P_2,P_3,P_4 nous obtenons
la solution de ce système : a=6 ; b=1 .
On peut d'ailleurs vérifier que $P_5=6P_4-P_3=6x985-169=5741$
Et $P_6=6xP_5-P_4=6x5741-985=33461$.
On peut vérifier aussi que :
$P_7=6xP_6-P_5$; $P_8=6xP_7-P_6$
Nous pouvons donc , raisonnablement ,utiliser la relation de récurrence :

$$P_n=6P_{n-1}-P_{n-2} \quad (5)$$

(Pour la justification mathématique de cette relation de récurrence voir en annexe les lemmes 1 et 2)

On sait que P9,P7,P5 doivent vérifier l'égalité (4) ,il s'agit donc de trouver i,j,k tels que :

$$P_i^2-1=P_k^2-P_j^2 \quad \text{avec } i<j<k \quad (6)$$

Nous allons montrer que ceci est impossible.

a) Il est évident par construction de la suite Pi que :

Pn>Pn-1>Pn-2>------>P2>P1

D'après la relation (5) on a : $P_{i+1}=6P_i-P_{i-1}$

D'où : $P_{i+1} / P_i = 6- P_{i-1} /P_i$

or $P_{i-1} /P_i < 1$ d'où

$P_{i+1} / P_i >5$

$P_{i+1}^2 / P_i^2 >25$

$P_{i+1}^2 > 25P_i^2$

$P_{i+1}^2- P_i^2 > 24 P_i^2>24 P_i^2-1>P_i^2 -1$ (a)

b)Quel que soit n>1 , on peut écrire : $P_{n+1}^2- P_n^2 = (P_{n+1} - P_n) (P_{n+1} + P_n)$

Or $P_{n+1}- P_n=6P_n-P_{n-1}- P_n =5P_n-P_{n-1}> P_n - P_{n-1}$

D'où : $P_{n+1}^2- P_n^2 > (P_n - P_{n-1}) (P_{n+1} + P_n)$

Or $P_{n+1} + P_n > P_n + P_{n-1}$

D'où : $P_{n+1}^2- P_n^2 > (P_n - P_{n-1}) (P_n + P_{n-1}) = P_n^2- P_{n-1}^2$ (b)

c) Il est évident que si k> i+3 alors :

: $P_k^2- P_{i+2}^2 > P_{i+2}^2- P_{i+1}^2$ (c)

En utilisant les inégalités (a) , (b) , (c) on peut conclure que quels que soient i, j , k (i <j<k) alors on a toujours :

$$P_k^2- P_j^2 > P_i^2- 1$$

Donc l'égalité (6) ne peut jamais être satisfaite.

Conclusion : Un carré magique 3x3 composé du nombre 1 et de 8 carrés impairs différents ne peut exister.

Annexe

Lemme 1 :Les solutions de l'équation $(-1)= Q^2 - 2P^2$ sont données par les 2 relations de récurrence : $P_n = 3P_{n-1} + 2Q_{n-1}$

$Q_n =4P_{n-1} + 3Q_{n-1}$ Avec $Q_1 =1$ et $P_1=1$

Preuve : Si un couple (Q_{n-1} , P_{n-1}) vérifie l'équation $(-1)= Q^2 - 2P^2$ cela signifie que $(-1)= Q_{n-1}^2- 2P_{n-1}^2$ et si nous multiplions par 1 , c'est à dire par $3^2- 2.2^2$ nous obtenons $(-1).1=-1= (Q_{n-1}^2- 2P_{n-1}^2)(3^2- 2.2^2)$.

L'identité suivante : $(a^2- 2b^2)(c^2- 2d^2)= (ac+2bd)^2- 2(ad+bc)^2$ nous permet d'écrire:

$$(-1)=(Q_{n-1}^2- 2P_{n-1}^2)(3^2- 2.2^2) =(3.Q_{n-1}+ 4P_{n-1})^2- 2(2Q_{n-1} +3P_{n-1})^2$$

Ainsi le couple $(3Q_{n-1}+4P_{n-1} , 2Q_{n-1}+3P_{n-1})$ est solution de l'équation : $(-1)= Q^2 - 2P^2$ et nous obtenons les 2 relations de récurrence :

$$P_n = 3P_{n-1} + 2Q_{n-1}$$
$$Q_n =4P_{n-1} + 3Q_{n-1}$$

Lemme 2 : Si 2 suites P_n et Q_n sont définies par les 2 relations de récurrence :

$$P_n = 3P_{n-1} + 2Q_{n-1} \quad (i)$$
$$Q_n =4P_{n-1} + 3Q_{n-1} \quad (j)$$

alors chaque suite est définie par la relation de récurrence :

$P_{n+1} = 6P_n - P_{n-1}$; $Q_{n+1} =6Q_n - Q_{n-1}$

Preuve : D'après les relations (i) et (j) nous pouvons écrire :

$$P_{n+1} = 3P_n + 2Q_n \quad (k)$$
$$Q_{n+1} =4P_n + 3Q_n \quad (l)$$

En utilisant les relations (j) et (k) nous obtenons :

$$P_{n+1} = 3P_n + 2(4P_{n-1} +3Q_{n-1})$$
$$P_{n+1} =3P_n + 8P_{n-1} +2.3Q_{n-1} \quad (m)$$

D'après la relation (i) : $2Q_{n-1} =P_n - 3P_{n-1}$ d'où la relation (m) devient :

$$P_{n+1} = 3P_n + 8P_{n-1} +3(P_n - 3P_{n-1})$$

Ainsi : $P_{n+1} = 6P_n - P_{n-1}$

De la même manière en utilisant les relations (i) , (j) et (l) nous obtenons :

$$Q_{n+1} = 6Q_n - Q_{n-1}$$

xxxxxxxxxxxxxxxxxxx