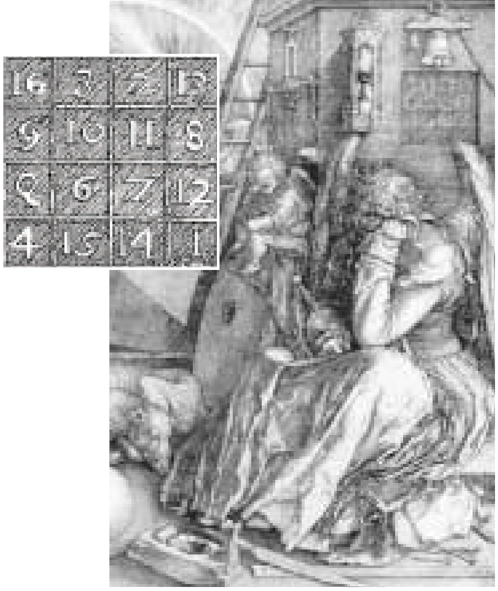


Les premiers carrés tétra et pentamagiques

CHRISTIAN BOYER

Les carrés magiques ont une vie propre, distincte du courant mathématique principal. La découverte des premiers carrés tétra et pentamagiques prolonge une tradition millénaire.

Vous savez ce qu'est un carré magique : un carré de côté n, comportant donc n x n = n^2 cases, où vous placez tous les nombres de 1 à n^2 de façon que les sommes des lignes, colonnes et diagonales soient toutes égales. Le carré magique de côté 3 est connu des Chinois depuis très longtemps : il daterait de… 2 200 ans avant Jésus-Christ ! (Figure 1a.) Un carré magique 4x4 est représenté dans Melancholia de Dürer (gravure de 1514 à côté du titre).

On sait aujourd'hui construire des carrés magiques de toute taille, à l'aide de nombreux et très variés algorithmes.

Carrés bimagiques et trimagiques

À la fin du XIX^e siècle, on eût l'idée de rajouter une condition supplémentaire. Si le carré magique reste magique lorsque l'on remplace chacun des nombres par son carré, alors le carré est dit «bimagique». Hélas, le carré chinois est magique, mais vraiment pas bimagique, les sommes variant de 77 à 107! (Figure 1b.) On imagine la difficulté pour construire de tels carrés bimagiques.

Le premier carré bimagique (figure 1c) connu date de 1890, et est dû au français Pfeffermann, qui n'a jamais donné sa méthode de construction. D'autres carrés bimagiques ont été ensuite trouvés par d'autres auteurs, ainsi que des méthodes pour les construire. Vous pourrez lire l'article de Pierre Tougne paru dans Pour la Science en août 1981, disponible sur le site de Pour la Science : www.pourlascience.com.

Les amateurs ont, bien sûr, essayé d'aller au-delà de la bimagie : les records sont faits pour être battus ! Mais l'art est difficile et le carré bimagique de Pfeffermann échoue en trimagie : les sommes des cubes des cellules, selon les rangées, varient entre 526 400 et 555 200. Seules 4 lignes valent la somme correcte, 540 800.

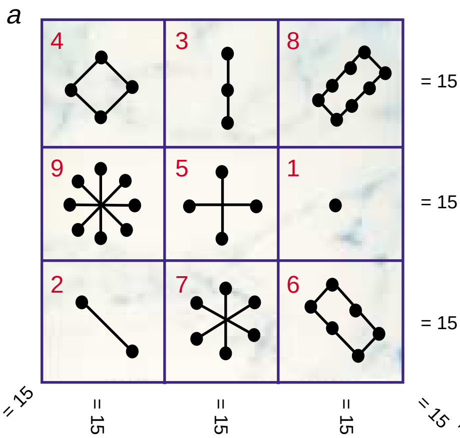
Le premier carré trimagique, donc allant jusqu'au cube des cellules, est dû au français Gaston Tarry (1843-1913), un aveyronnais qui, après avoir étudié en Mathématiques Spéciales au Lycée Saint-Louis à Paris, fait toute sa carrière en Algérie au service des Contributions directes de l'Administration des Finances. Son métier lui fait donc manipuler les chiffres !

Toi aussi Brutus

Écoutons Tarry (représenté ci-dessus) raconter comment est née sa passion pour les carrés magiques alors qu'il avait une cinquantaine d'années :

Pendant trois ans, à peu près, un ami d'Alger [Brutus Portier], mage enragé, n'a cessé de me turlupiner pour que je m'occupe des carrés magiques. Je l'envoyais promener, n'aimant pas ce que je considérais comme un jeu de casse-tête chinois. Un jour, mon pro-

a



b

$4^2 = 16$	$3^2 = 9$	$8^2 = 64$	= 89
$9^2 = 81$	$5^2 = 25$	$1^2 = 1$	= 107
$2^2 = 4$	$7^2 = 49$	$6^2 = 36$	= 89
= 93 / = 101	= 83	= 101	= 77

c

56	34	8	57	18	47	9	31	= 260
33	20	54	48	7	29	59	10	= 260
26	43	13	23	64	38	4	49	= 260
19	5	35	30	53	12	46	60	= 260
15	25	63	2	41	24	50	40	= 260
6	55	17	11	36	58	32	45	= 260
61	16	42	52	27	1	39	22	= 260
44	62	28	37	14	51	21	3	= 260
= 260 / = 260	= 260	= 260	= 260	= 260	= 260	= 260	= 260	= 260

1. Le carré magique 3x3 est le plus simple *(a)* : il était connu des Chinois avec la représentation indiquée ici. Ce n'est pas un carré bimagique : les sommes des carrés des éléments selon les lignes, les colonnes et les deux diagonales ne donnent pas la même valeur *(b)*. Le premier carré bimagique est celui de Pfeffermann *(c)*. Il est facile de vérifier, en élevant au carré tous ses éléments, que la somme des carrés des éléments des lignes colonnes et diagonales sur le nouveau carré obtenu est égale à 11 180. En revanche, ce carré n'est pas trimagique.

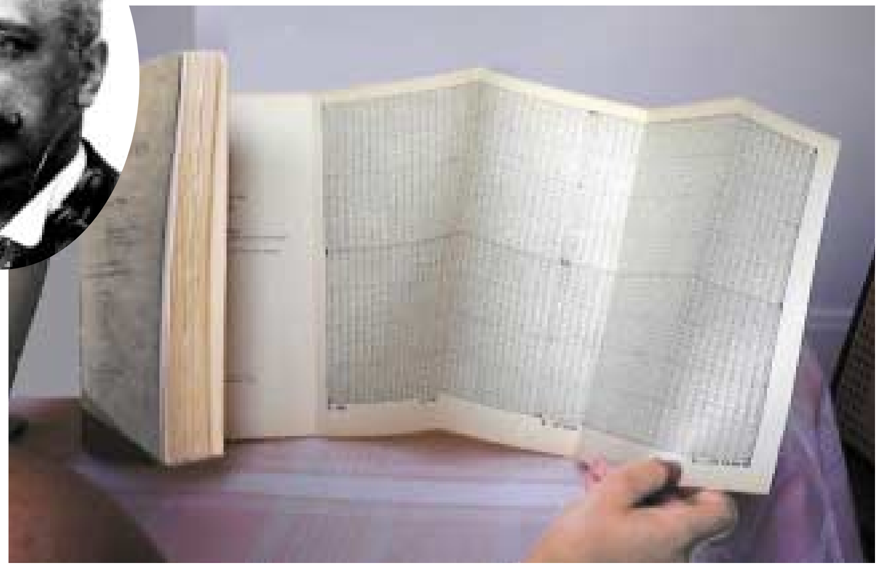
fesseur de magie malgré moi m'affirma qu'il était impossible de construire des carrés diaboliques (panmagiques) de côté 3 n, n n'étant pas divisible par 3. Cela me surprit.

Étonné, Gaston Tarry examine donc le problème et, vous vous en doutez, découvre son premier carré panmagique de côté 15 (un carré panmagique ou diabolique est un carré qui est magique pour toutes ses lignes, ses colonnes et toutes ses diagonales entières ou brisées, et pas seulement pour ses deux diagonales classiques). Une passion est née et Tarry écrira un grand nombre d'articles sur les carrés magiques dans les revues scientifiques de l'époque.

En 1905, Tarry est le premier à construire un carré trimagique. Son carré a pour côté 128. Tarry appelait sa méthode «condensateur cabalistique», dont on trouve la description dans La Mathématique des Jeux de Maurice Kraïtchik. Nous ne résistons pas au plaisir de citer Gaston Tarry dans le texte : Ce condensateur est une véritable machine magique chargée à sa limite. En la déchargeant, nous obtiendrons des effets magiques. La décharge ne peut avoir lieu que dans un milieu bon conducteur, un champ magique. Étonnant!

Les records actuels, avant cet article, sont toujours des carrés trimagiques, mais les amateurs ont essayé de trouver des côtés inférieurs à 128. Bizarrement, il est plus difficile de trouver des petits carrés trimagiques que des grands.

Les recherches de Tarry seront poursuivies par un autre français au prénom rarissime, Eutrope Cazalas, général de son état. Ce fils d'un contrôleur des Contributions directes (décidément, après Gaston Tarry…) est un esprit brillant qui, après avoir fait l'École Polytechnique, devient rapidement capitaine de l'armée de terre, traduit en 1899 un ouvrage russe Vers l'Inde, et publie en 1909 un opuscule Le Ballon Militaire capturé à Wurzbourg en 1796 (mais tout ceci n'a aucun rapport avec les carrés magiques...). Il continue à monter en grade, combat avec éclat pendant la guerre 1914-1918, et devient général en 1921. Notre général, alors à la retraite de l'armée, construit en 1933 le premier carré trimagique 64x64 connu, qu'il cal-



3. Carré trimagique, entièrement calculé à la main, en 1933, par le général Eutrope Cazalas (1864-1943), représenté en médaillon. Eutrope publia ce carré dans son ouvrage, *Les Carrés Magiques au Degré n.*

CARRÉ	TAILLE	INVENTEUR	PAYS	DATE
BIMAGIQUE	8x8	G. Pfeffermann	France	1890
TRIMAGIQUE	128x128	Gaston Tarry	France	1905
TRIMAGIQUE	64x64	Général Cazalas	France	1933
TRIMAGIQUE	32x32	William Benson	États-Unis	Publié en1976*
TÉTRAMAGIQUE	512x512	C. Boyer-A. Viricel	France	2001
PENTAMAGIQUE	1024x1024	C. Boyer-A. Viricel	France	2001

4. Les records des carrés multimagiques obtenus à ce jour. * Dans son ouvrage de 1976, Benson indique avoir construit le carré trimagique 32 x 32 dès 1949.

a

= 16400	2	831	1017	...	587	653	436
= 16400	59	774	964	...	626	696	393
= 16400	931	158	92	...	490	304	529
	...	...	...	...	...	...	...
= 16400	220	997	803	...	657	599	362
= 16400	836	125	187	...	265	463	754
= 16400	889	72	130	...	308	502	715
= 16400	= 16400	= 16400	= 16400		= 16400	= 16400	= 16400

b

	0	139938	18244	...	243899	122205	262143	= 67108608
	140551	1957	156227	...	105916	260186	121592	= 67108608
	18959	157869	3403	...	258740	104274	243184	= 67108608
	...	...	...	...	...	...	...	
	242703	104109	258891	...	3252	158034	19440	= 67108608
	121607	260517	105539	...	156604	1626	140536	= 67108608
	261632	122018	244036	...	18107	140125	511	= 67108608
= 67108608	= 67108608	= 67108608	= 67108608		= 67108608	= 67108608	= 67108608	= 67108608

c

	0	733632	419712	...	628863	314943	1048575	= 536870400
	866545	395569	745329	...	303246	653036	182030	= 536870400
	685538	82978	791138	...	257437	965597	363037	= 536870400
	...	...	...	...	...	...	...	
	685597	83933	790941	...	257634	964642	362978	= 536870400
	867086	395982	744590	...	303985	652593	181489	= 536870400
	1023	733759	418943	...	629632	314816	1047552	= 536870400
= 536870400	= 536870400	= 536870400	= 536870400		= 536870400	= 536870400	= 536870400	= 536870400

2. Le plus petit carré trimagique *(a)* connu à ce jour est un carré 32 x 32, publié par William Benson en 1976. Le premier carré tétramagique connu *(b)* : ce carré est magique et les carrés, cubes et puissances 4 des éléments de ce carré forment aussi des carrés magiques. En *(c)*, le premier carré pentamagique connu dont les puissances cinquièmes des éléments forment aussi un carré magique, de même que les puissances inférieures. Tous les carrés complets peuvent être consultés sur le site de Pour la Science.

5. LES FORMULES «MAGIQUES»

Comment déterminer les sommes des lignes, colonnes et diagonales des carrés multimagiques ?
Un carré magique de côté n contient tous les nombres de 1 à n^2.
Commençons par la magie simple. Il est connu que la somme des premiers nombres entiers de 1 à N est : $N(N+1)/2$. La somme des premiers nombres entiers de 1 à n^2 est donc : $n^2(n^2+1)/2$
Puisqu'il y a n lignes à ce carré, il suffit de diviser par n pour savoir ce que doit être la somme magique S_1 de chaque ligne, colonne ou diagonale, soit $S_1 = n\,(n^2+1)/2$
Pour la bimagie, la somme des carrés des premiers nombres entiers de 1 à n^2 est $n^2(n^2+1)(2n^2+1)/6$. En divisant par n, nous obtenons la somme S_1 de chaque ligne, colonne ou diagonale, soit donc $S_2 = n(n^2+1)(2n^2+1)/6$ ou encore $S_1 \text{x} (2n^2+1)/3$. Pour la trimagie, la somme des cubes est $S_3 = n \text{ x } S_1{}^2$
Pour la tétramagie, Fermat donnait, dès 1636, dans une lettre envoyée à Roberval, la solution de la somme des entiers de 1 à N élevés à la puissance 4. Voici la formule de Fermat après avoir remplacé N par n^2, puis divisé par n :
$S_4 = ((4n^2 + 2) \text{ x } n \text{ x } S_1{}^2 - S_2) / 5$. En remplaçant $(4n^2 + 2) \text{ x } S_1$ par $6S_2$, on peut écrire, plus simplement que Fermat : $S_4 = S_2 \text{ x } (6n \text{ x } S_1 - 1)/ 5$.
Pour la pentamagie (somme des puissances 5) : $S_5 = (3n \text{ x } S_2{}^2 - S_3)/ 2$.
Si l'on préfère développer S_p, cela donne le tableau suivant, tableau généreux puisqu'il permet de calculer jusqu'aux sommes des records futurs, les carrés hexa, hepta et octomagiques :

$S_1 = (1/2)\,n^3 + (1/2)\,n$
$S_2 = (1/3)\,n^5 + (1/2)\,n^3 + (1/6)\,n$
$S_3 = (1/4)\,n^7 + (1/2)\,n^5 + (1/4)\,n^3$
$S_4 = (1/5)\,n^9 + (1/2)\,n^7 + (1/3)\,n^5 - (1/30)\,n$
$S_5 = (1/6)\,n^{11} + (1/2)\,n^9 + (5/12)\,n^7 - (1/12)\,n^3$
$S_6 = (1/7)\,n^{13} + (1/2)\,n^{11} + (1/2)\,n^9 - (1/6)\,n^5 + (1/42)\,n$
$S_7 = (1/8)\,n^{15} + (1/2)\,n^{13} + (7/12)\,n^{11} - (7/24)\,n^7 + (1/12)\,n^3$
$S_8 = (1/9)\,n^{17} + (1/2)\,n^{15} + (2/3)\,n^{13} - (7/15)\,n^9 + (2/9)\,n^5 - (1/30)\,n.$

Pour calculer S_p lorsque le carré p-magique de côté n contient les nombres de 0 à $n^2 - 1$ (au lieu des nombres de 1 à n^2), il faut mettre le signe – au lieu du signe + de la deuxième colonne.
Vous remarquerez que la 1ère colonne de S_p est égale à $1/(p + 1) \text{ x } n^{2p+1}$. Cette particularité est connue depuis le milieu du XVII° siècle, grâce à Pascal. Jacques Bernoulli s'intéressa ensuite à cette question de la somme des puissances d'entiers, et depuis son *Ars conjectandi* paru après sa mort début XVIII°, les nombres utilisés dans ce développement s'appellent maintenant nombres de Bernoulli (1/6, –1/30, 1/42, –1/30, 5/66, …).
Voici ce que donnent ces formules pour quelques tailles de carrés A x A :

	3 x 3	4 x 4	5 x 5	6 x 6	7 x 7	8 x 8	9 x 9	32 x 32
S_1	15	34	65	111	175	260	369	16400
S_2	95	374	1105	2701	5775	11180	20049	11201200
S_3	675	4624	21125	73926	214375	540800	1225449	8606720000

Sur les sommes ci-dessus(S_p) d'un carré p-magique de côté n, contenant les nombres de 1 à n^2, on retrouve les sommes du carré bimagique 8x8 de Pfeffermann et trimagique 32x32 de William Benson.

	32 x 32	512 x 512	1024 x 1024
S_1	16368	67108608	536870400
S_2	11168432	11728056920832	375299432076800
S_3	8573165568	2305825417061203968	2951473422229667840000
S_4	7019705733392	483565716171561366524160	247587417561640996243120640
S_5	5987221633671168	105636341097042573844228866048	216345083469423421673932062720000

Avec ces sommes S_p d'un carré p-magique de côté n, contenant les nombres de 0 à n^2–1, on retrouve les sommes des 2 carrés tétramagique 512x512 et pentamagique 1024x1024 de l'article. Pour plus de détails sur les sommes de puissances, voir le chapitre 14 *Sommation des puissances numériques*, livre II de la *Théorie des Nombres* d'Edouard Lucas, Librairie Blanchard.

cule à la main et le publie intégralement à la fin de son impressionnant livre Les Carrés Magiques au Degré n. Notre général pensait alors – à tort – qu'il ne pouvait en exister de plus petits.

Le premier carré trimagique 32 x 32 connu est dû à l'américain William Benson. Même s'il est plus petit que celui du général Cazalas, il est toujours un peu trop grand pour être publié ici et nous n'en donnerons ici que les coins (figure 2a) : les sommes des carrés des lignes, colonnes et diagonales sont 11 201 200 (Benson avait utilisé un ordinateur IBM pour ses calculs). Les sommes des cubes des lignes, colonnes et diagonales sont 8 606 720 000. La totalité de ce carré a été publiée pour la première fois en 1976 dans le livre New recreations with Magic Squares (pages 86-87) de W. Benson et O. Jacoby, consultable sur le site Internet de Pour la Science. On en retrouve une copie intégrale dans le récent livre Les carrés magiques (page 146) de René Descombes ; on ne sait pas aujourd'hui si il existe des carrés trimagiques de taille inférieure à 32 x 32.

Carrés tétramagique et pentamagique

Personne à notre connaissance n'a encore été au-delà de la trimagie. Serait-il impossible de construire des carrés dont la magie va jusqu'à la puissance 4, voire 5?

En étudiant une méthode de construction de carrés trimagiques 32x32 due à André Viricel, donc construisant des carrés de même taille que celui de William Benson, j'ai essayé d'aller au-delà pour construire des carrés tétramagiques (…si l'on aime le grec) ou quadrimagiques (…si l'on préfère le latin).

Après avoir essayé sans succès sur des carrés de côté 32, 64 et 128, j'ai pu construire des carrés de côté 256 tétramagiques pour les lignes et colonnes, mais dont, hélas, les diagonales restaient obstinément trimagiques «seulement».

Je suis donc ensuite monté à la taille 512, et là, gagné, c'est le bonheur, j'ai obtenu les premiers carrés entièrement tétramagiques ! En avant-première mondiale (soyons pompeux), les coins du premier carré tétramagique sont indiqués sur la figure 2b, le carré total étant consultable sur le site Internet de Pour la Science.

Attention, il utilise les nombres de 0 à $512^2 - 1$=262 143. Si vous préférez les carrés classiques commençant par 1, il suffit de rajouter 1 à chaque cellule… cela modifie bien sûr les sommes, mais le carré est toujours tétramagique.

C'est un carré vraiment monstrueux …, avec ses 262 144 cellules. Ce carré tétramagique se permet même d'avoir une caractéristique supplémentaire : ses

512 lignes sont pentamagiques, donc jusqu'à la puissance 5. Alors, pourquoi s'arrêter en si bon chemin? Les carrés pentamagiques ne doivent pas être loin.

Bingo! La méthode, appliquée aux carrés de taille1024x1024 permet de trouver des carrés pentamagiques! Les coins du carré pentamagique découvert sont indiqués sur la figure 5. La méthode employée est indiquée ci-contre.

Vérifications

J'entends déjà l'objection : ces carrés sont-ils vraiment tétra et pentamagique? Étant donnée la taille du carré, personne ne peut manuellement vérifier la véracité de l'affirmation. Cela ne peut se faire que par informatique. Et qui dit informatique, dit… bug possible! D'où le doute insidieux.

Les différentes vérifications ont été faites par des personnes indépendantes (par Christian Boyer, Enghien les Bains, UBasic / Yves Gallot, Toulouse, C et librairie Integer de Proth / Renaud Lifchitz, Paris, Mathematica / Olivier Ramare, Lille, MuPAD) dans des lieux différents et avec des outils distincts : ces carrés sont bel et bien tétra et pentamagiques!

Si vous voulez le vérifier vous-même, ils sont à votre disposition à l'adresse Internet http://www.pourlascience.com, mais attention, sous forme ASCII zippée, les fichiers font quand même 0,8 et 3,8 mégaoctets! Et attention à votre programme de vérification! Il doit savoir calculer en multiprécision, S_5, la somme magique du carré pentamagique, (voir la figure 5) étant de l'ordre de 2×10^{32}.

Et si vous, lecteur, étiez le prochain détenteur du record de multimagie? Peut-être saurez-vous trouver des carrés tétramagiques et pentamagiques plus petits, de côté inférieur respectivement à 512 et 1 024? Je suis persuadé que de tels carrés existent.

Je formule l'hypothèse que cette méthode continue à fonctionner, et doit permettre de trouver relativement facilement des carrés hexamagiques, heptamagiques, octomagiques, etc. jusqu'à un niveau quelconque de multimagie, en augmentant suffisamment la taille de carrés, et bien sûr à condition d'utiliser de bons moyens informatiques. Peut-être vérifierez-vous cette hypothèse?

Le mystère du carré bimagique 7x7

À côté de ces monstrueux carrés multimagiques, il est plaisant de s'arrêter sur le problème opposé, celui du plus petit carré multimagique possible. Il est facile de démontrer qu'aucun carré bimagique de côté inférieur ou égal à 5 ne peut exister. Il est plus difficile, mais faisable,

6. La méthode utilisée

Voici le secret utilisé pour obtenir ces carrés tétra et pentamagiques. Cette méthode est initialement due à André Viricel qui a aujourd'hui 88 ans, et qui garde toujours un esprit aussi vif et acéré que lorsqu'il était professeur de mathématiques en activité.

André Viricel a initialement conçu cette méthode pour construire des carrés trimagiques 32 x 32. Ma contribution a donc été modeste : j'ai eu simplement l'idée de la tester sur des niveaux supérieurs de multimagie, et sur des carrés de taille plus grande, et de l'implémenter informatiquement.

Voici la méthode qui vous permettra de calculer vous-même vos propres carrés multimagiques :

Démarrer par le coin haut gauche, en choisissant deux nombres N_1 et N_2, différents et non nuls. Calculer la ligne 0 et la colonne 0, à l'aide de la multiplication numérale "@", puis calculer les autres lignes et colonnes, à l'aide de l'addition numérale "&" des éléments de la ligne 0 et de la colonne 0: ces deux opérations sont détaillées plus bas.

	Col 0	Col 1	Col 2	...	Col i	...
Li 0	0 = (0,0)	N_1 = (a,b)	2 @ (a,b)	...	i @ (a,b) …	...
Li 1	N_2 = (c,d)	(a,b) & (c,d)	2@(a,b) & (c,d)	...	i@(a,b) & (c,d)	...
...	...	...	...	...	...	...
Li j	j @ (c,d)	(a,b) & j@(c,d)	2@(a,b) & j@(c,d)		i@(a,b) & j@(c,d)	...
...	...	...	...	...	...	...

La notation *(a,b)* indique un nombre décomposé dans la base *n* (*n* étant le côté du carré), *a* étant le quotient et *b* le reste. Prenons maintenant l'exemple de notre carré tétramagique (figure 2*b*). Regardons son coin haut gauche :

0	139938
140551	1957

N_1=139938 = 273 x 512 (taille du carré) + 162 Donc (a,b) = (273,162)

N_2=140551 = 274 x 512 (taille du carré) + 263 Donc (c,d) = (274,263)

Nous ne connaissons pas actuellement les règles exactes qui permettent de savoir si un couple N1 et N2 va engendrer un carré multimagique. Mais vous trouverez des couples autres que 139938/140551 qui donnent des carrés tétramagiques 512 x 512 : les plus petits sont 535/1103, 535/1145, etc...

Addition numérale &

Ce que l'on appelle ici l'addition numérale «&»est bien connue des informaticiens : il s'agit du OU EXCLUSIF, 0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 0.

139938 = 100010001010100010 (en base 2)

140551 = 100010010100000111 (en base 2)

139938 & 140551 = 000000011110100101 (en base 2) = 1957 (en base 10) : 1957 est bien le nombre du tableau, sous le nombre 139938

Multiplication numérale @

Calculons l'avant-dernière cellule de la ligne 0 de notre carré tétramagique.

Elle vaut donc 510@(273,162). Commençons par calculer 510@273. 510 = 111111110 (en base 2) et 273 = 100010001 (en base 2)

La multiplication numérale se calcule comme la multiplication classique que l'on apprend à l'école, sauf que l'addition finale effectuée n'est pas classique, mais numérale (donc « ou exclusif » binaire). Cela donne :

```
                  1 1 1 1 1 1 1 1 0
                @ 1 0 0 0 1 0 0 0 1
                  -----------------
                  1 1 1 1 1 1 1 1 0
          & 1 1 1 1 1 1 1 1 0 . . .
  & 1 1 1 1 1 1 1 1 0 . . .
  ---------------------------------
  = 1 1 1 1 0 0 0 0|0 0 0 0 1 1 1 1 0
```

Pour conclure la multiplication et afin que le résultat reste de la même taille que ses deux opérandes (inférieurs à 512), on effectue une addition numérale supplémentaire des parties droite et gauche du résultat, soit donc : 0 0 0 0 1 1 1 1 0 & 0 1 1 1 1 0 0 0 0 = 0 1 1 1 0 1 1 1 0

Le résultat de 510@273 est donc 11101110 en base 2, soit 238 en base 10.

Si, par la même méthode, on calcule 510@162, on trouvera 349.

Le résultat de 510@(273,162) est donc (238,349) = 238 x 512+349 = 122205.

Dans le coin haut droit de notre carré tétramagique, on retrouve bien ce nombre dans l'avant-dernière cellule de la ligne 0 (figure 2*b*) :

122205	262143
260186	121592

de démontrer qu'aucun carré bimagique de côté 6 ne peut exister.

Pour un éventuel carré bimagique de côté 7, la question est encore aujourd'hui réputée ouverte. Démarrons le raisonnement.

Dans un carré 7 x 7, il y a 49 cases. Il faut donc caser les nombres de 1 à 49, soit donc 25 impairs et 24 pairs. La somme S_1 des éléments d'une rangée d'un tel carré doit être égale à 7 x (49 + 1)/2, soit 175.

La somme S_2 des carrés des éléments d'une rangée doit être égale à 7 x (49 + 1) x (2 x 49 + 1)/6 = 5775, qui est de la forme 4k + 3.

Les carrés des nombres pairs étant de la forme 4k, et les carrés des nombres impairs étant de la forme 4k + 1, une somme de 7 carrés ne peut faire 4k + 3 que si la rangée contient 3 ou 7 nombres impairs.

Pour caser 25 impairs sur 7 rangées, la seule possibilité est donc d'avoir : 6 rangées à 3 impairs et 1 rangée à 7 impairs. D'où la question majeure : existe-t-il des groupes de 7 nombres impairs distincts, compris entre 1 et 49, dont la somme fait 175 et la somme des carrés fait 5 775?

En 1892, Michel Frolov, dans le bulletin de la renommée Société Mathématique de France, affirmait qu'il n'existe aucun de ces groupes : il en conclut qu'aucun carré bimagique 7 x 7 ne peut exister. Erreur, Monsieur Frolov! Mais nous lui pardonnerons, car l'informatique n'existe pas encore à son époque.

Nous avons trouvé exactement 60 groupes ayant ces propriétés, comme par exemple :

G_1 = 49, 43, 25, 19, 17, 13, 9
G_2 = 49, 41, 29, 19, 17, 11, 9
…
G_{13} = 49, 33, 31, 25, 23, 13, 1
…
G_{60} = 41, 37, 33, 31, 25, 7, 1

Pour constituer une ligne et une colonne d'un tel carré, il suffit qu'il existe au moins un couple de 2 parmi ces 60 groupes ayant un et un seul élément commun.

Si nos calculs sont justes, il y a exactement 424 couples possibles parmi ces groupes de 7 impairs. Par exemple les groupes G_2, G_{13} cités ci-dessus ont en commun le seul nombre 49 : le nombre 49 sera alors l'intersection ligne/colonne du couple G_2/G_{13}.

17	29	11	19	41	49	9
36	44	7	38	5	25	20
37	3	34	18	8	33	12
15	45	30	14	46	13	12
6	2	43	35	26	31	32
16	28	40	47	22	1	21
48	24	10	4	27	23	39

7. Un carré «quasi» bimagique 7x7 obtenu avec G_2 et G_{13}. Je vous défie de trouver mieux!

Si on ne se limite pas aux nombres impairs, il existe 1 844 groupes de nombres distincts, pairs ou impairs, compris entre 1 et 49, dont la somme fait 175 et la somme des carrés fait 5 775.

Cette liste a été publiée dès 1909 par Achille Rilly dans Sphinx-Œdipe. Sans informatique, saluons l'exploit!

Il est possible de construire un programme informatique qui, à partir de ces 424 couples, puis en puisant parmi les 1 844 groupes, essaye de construire un carré bimagique. Sauf erreur de programmation de ma part, j'affirme qu'un tel carré bimagique 7 x 7 n'existe pas.

Mais… voici toutefois (figure 7) un exemple de carré de côté 7 que j'ai obtenu, justement à partir du couple d'impairs G_2 / G_{13} présent en 1re ligne / 6e colonne.

Est-il magique? Est-il bimagique? Ce carré 7 x 7 est «quasi» bimagique. Où sont ses failles? Mon défi : trouverez-vous mieux?

Je vous laisse prendre votre calculette, ou votre tableur, et tapoter. J'affirme, sans preuve mathématique, qu'il est impossible de faire mieux. Mais peut-être est-ce faux?

Peut-être saurez-vous approcher de plus près la bimagie de côté 7? Ou même, éventuellement, infirmer ce que j'annonce, et prouver, tout simplement en le trouvant, que le mythique carré bimagique de côté 7 existe bel et bien?

Christian BOYER est consultant en informatique : cboyer@club-internet.fr.
Il remercie Yves Roussel de l'ADCS et Jacques Bouteloup pour leur aide.

***La Mathématique des Jeux ou Récréations Mathématiques*, par Maurice Kraïtchik, Stevens Frères, Bruxelles, 1930.**

***Carrés Magiques au Degré n*, par le Général E. Cazalas, Hermann, Paris, 1934.**

***New Recreations with Magic Squares*, par William Benson & Oswald Jacoby, Dover Publications, New York, 1976.**

***Carrés Magiques Carrés Latins et Eulériens*, par Jacques Bouteloup, Éditions du Choix, 1991 (cet éditeur est maintenant situé à Marseille).**

***Les Carrés Magiques*, par René Descombes Vuibert, Paris, 2000.**