

Le plus petit cube magique

Des tableaux de chiffres en trois dimensions dont les sommes des lignes, des colonnes et des diagonales sont toutes égales : les cubes magiques passionnent des mathématiciens, professionnels comme amateurs, depuis plus de trois siècles. La complexité des recherches est inversement proportionnelle à la taille de ces objets : le plus petit d'entre eux vient seulement d'être trouvé.

Christian Boyer
est consultant indépendant
en informatique
cboyer@club-internet.fr

En 1866, le révérend anglais Andrew H. Frost, amateur de jeux mathématiques, annonce dans une revue savante, *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, la construction du premier cube magique parfait. Ce cube s'inscrit dans une longue tradition de recherches mathématiques « parallèles » menées depuis toujours par des amateurs passionnés auxquels se joignent parfois de grands mathématiciens. Cent trente-sept ans plus tard, fidèles à cette tradition, nous avons réussi à construire avec Walter Trump, professeur de mathématiques en Allemagne, le plus petit de ces cubes magiques parfaits.

Qu'est-ce donc qu'un « cube magique parfait » ? Faisons d'abord un détour par le carré magique. Un carré magique d'ordre n est un tableau carré de n cases sur n contenant toutes un nombre entier entre 1 et n^2 , et tel que, en faisant la somme de n'importe quelle ligne, de n'importe quelle colonne ou de n'importe laquelle des deux diagonales, on trouve toujours le même total. Chacun des nombres entre 1 et n^2 n'apparaît qu'une fois dans le tableau.

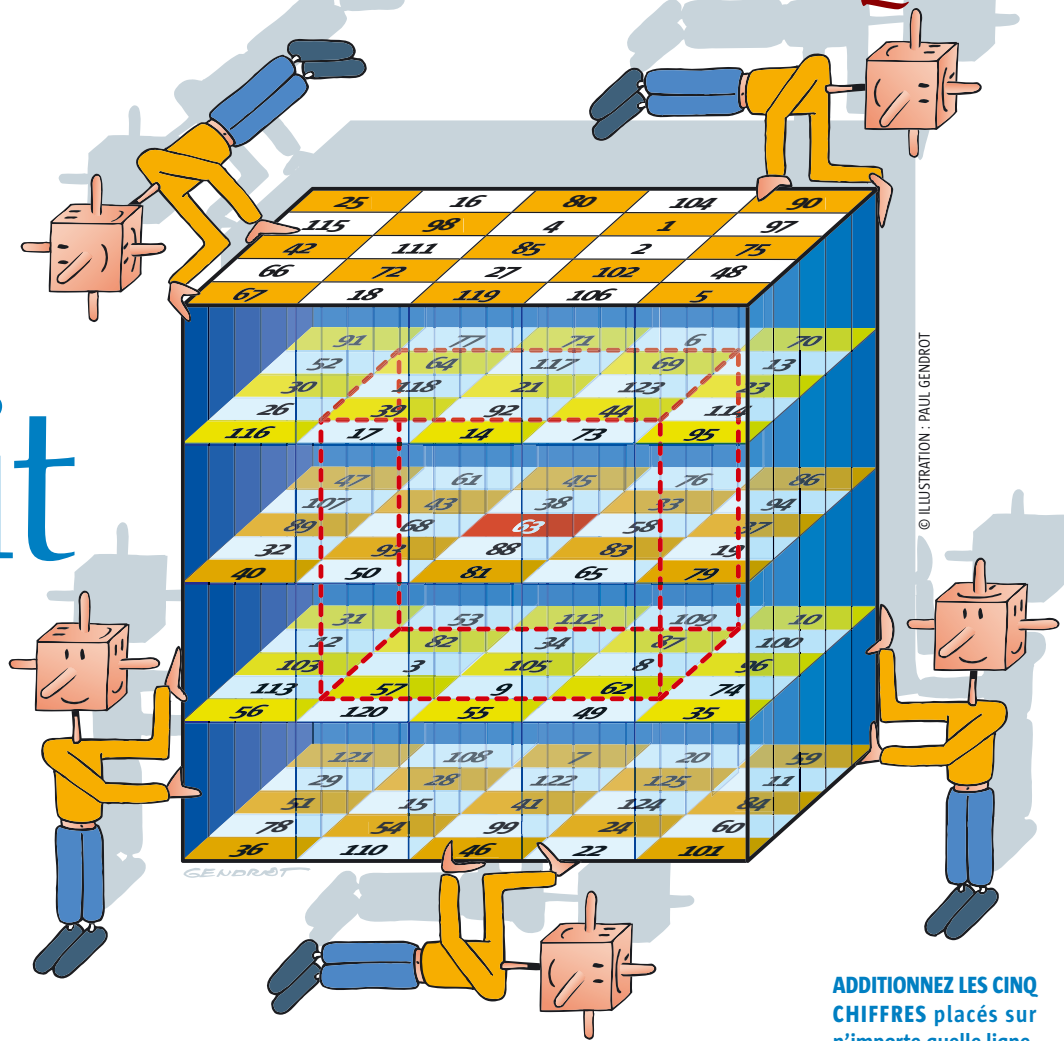
Un cube magique d'ordre n est, lui, un empilement de n carrés d'ordre n contenant tous les entiers de 1 à n^3 , qui vérifie que

POUR EXPRIMER LA SYMBOLIQUE du chiffre 4 dans sa gravure *Melencolia*, Albrecht Dürer utilisa, entre autres, un carré magique parfait, dans lequel il inscrivit, de plus, la date de l'œuvre, 1514. Même s'il en avait connu l'existence, il n'aurait pu utiliser un cube magique parfait : le plus petit est d'ordre 5 !



© AKG

parfait



© ILLUSTRATION : PAUL GENDROT

la somme des nombres de n'importe quelle colonne, ligne, « pile » (les lignes verticales) ou grande diagonale (diagonale joignant les sommets opposés du cube) est toujours la même. Un cube magique est dit « parfait » lorsque les diagonales des carrés parallèles aux faces du cube produisent elles aussi la somme magique des lignes, des colonnes, des piles et des grandes diagonales. Autrement dit, un cube magique parfait d'ordre n est un cube dans lequel chaque carré horizontal, vertical ou diagonal de côté n extrait du cube est magique.

Les carrés magiques ont été inventés en Chine, probablement, 2 000 ans avant notre ère. Les cubes magiques, en revanche, sont beaucoup plus récents : Pierre de Fermat aborde le sujet le premier, en 1640, dans une lettre adressée à Marin Mersenne, correspondant de nombreux savants de l'époque. Au siècle suivant, Leibniz, autre mathématicien célèbre, s'intéresse aussi de près aux cubes magiques (lire « Le cube magique de Leibniz est retrouvé », p. 50). La définition du cube magique n'est toutefois pas fixée à cette époque : celles de Fermat et de Leibniz sont différentes. Il faut attendre la seconde moitié du XIX^e siècle pour que différents mathématiciens, parmi lesquels Frost, s'accordent sur la définition moderne.

Cent trente-sept ans d'attente

Le cube magique parfait proposé par Frost était d'ordre 7. De nombreux autres cubes parfaits, d'ordres 7, 8, 9, etc., ont ensuite été trouvés par différents auteurs. J'ai moi-même construit un gigantesque cube magique parfait d'ordre 8192 qui possède la propriété supplémentaire d'être « tétramagique » – c'est-à-dire que ce cube est magique parfait non seulement pour les nombres initiaux, mais aussi lorsqu'on remplace ceux-ci par leurs

carrés, ou bien par leurs cubes, ou même encore par leur puissance quatrième ! Finalement, ce sont les plus petits cubes qui se seront montrés les plus résistants : nul cube parfait d'ordre inférieur à 7 n'avait jamais été trouvé (à l'exception bien entendu du cas évident d'ordre 1).

Pour l'ordre 2, on vérifie facilement qu'aucun carré, ni cube magique ne peut exister. Et les cubes magiques parfaits d'ordre 3 et 4 sont également impossibles. Pour l'ordre 3, la preuve est assez simple puisqu'aux symétries près il n'existe que quatre cubes magiques différents. Il suffit de vérifier qu'aucun d'eux n'est parfait.

Pour l'ordre 4, l'impossibilité a été prouvée en 1972 par Richard Schroepel [1] dans un *Artificial Intelligence Memo* du Massachusetts Institute of Technology. R. Schroepel avait ensuite montré en 1976, à l'aide d'algèbre et de raisonnement combinatoire, que si jamais un cube magique d'ordre 5 existait, alors le nombre situé en son centre serait 63. Quant à l'ordre 6, on ne savait rien.

Après plus d'un siècle de recherches infructueuses, beaucoup commençaient donc à penser qu'il n'existait aucun cube magique parfait d'ordre 5 ou 6. Mais en septembre 2003, Walter Trump présenta un cube magique parfait d'ordre 6. Ce record de petite taille n'a pas tenu longtemps. Après deux mois de travail en commun, Walter Trump et moi-même avons en effet débusqué le premier cube ⇒

ADDITIONNEZ LES CINQ CHIFFRES placés sur n'importe quelle ligne, colonne, « pile » ou diagonale de ce cube, le total sera égal à 315. Et tous les nombres de 1 à 125 y sont. C'est un cube magique parfait, et c'est le plus petit possible !

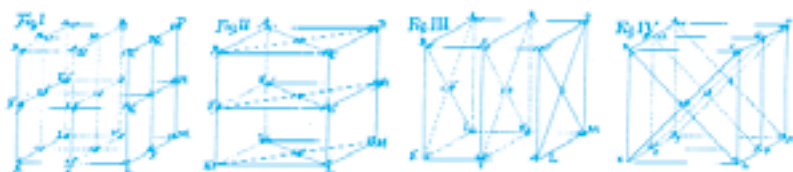
[1] www.cs.arizona.edu/~rscs/ ; M. Gardner, *Scientific American*, 234, 118, 1976.

INÉDIT

Le cube magique de Leibniz est retrouvé

■ En octobre 1715, Leibniz envoie à l'Académie des sciences de Paris un cube magique d'ordre 3 fabriqué par le Père Augustin Thomas de Saint Joseph, professeur à Horn, en Autriche. En novembre, l'Académie charge deux de ses mathématiciens de l'examiner : Pierre Varignon et Philippe de La Hire. En décembre, La Hire confirme devant l'Académie que ce cube a bien les propriétés annoncées, mais qu'il n'a pu trouver sa méthode de construction. C'est alors Joseph Sauveur qui se penche sur le problème, lui qui avait déjà publié à l'Académie son mémoire sur les cubes magiques [2]. Il répond à Leibniz en janvier 1716, en lui indiquant une méthode pour l'ordre 3.

Précisons que le cube d'ordre 3 examiné à l'Académie ne correspond pas à la définition moderne des cubes magiques, mais est conforme aux définitions utilisées cinq ans auparavant par Joseph Sauveur : chaque tranche horizontale, verticale ou



diagonale (ici de $3 \times 3 = 9$ nombres) totalise la même somme (ici 126). On ne tient donc pas compte des lignes, colonnes et piles qui peuvent avoir des sommes variées. Une malédiction pèse-t-elle sur ce cube ? Les cinq personnes qui y travaillent de près ou de loin entre fin 1715 et début 1716 meurent extrêmement rapidement : Leibniz et Sauveur en 1716, le père Augustin en 1717, La Hire en 1718 et enfin Varignon, celui qui avait le moins travaillé dessus, en 1722 ! Ce cube n'a jamais été retrouvé à l'Académie des sciences. En 2003, Herbert Breger, directeur des archives de Leibniz conservées à la Niedersächsische Landesbibliothek de Hanovre, m'a aidé à trouver ce cube dans l'incroyable montagne de 200 000 feuilles pour 50 000 documents laissés par ce prolifique génie aux plus de mille correspondants. Un extrait de ce document est ici publié pour la toute première fois.

DOCUMENT LHXXXV, X1, 5 F.8 © NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK DE HANOVRE

⇒ magique parfait d'ordre 5. Bien entendu, il n'aurait pas été possible d'espérer trouver un tel cube simplement en essayant successivement tous les placements imaginables des 125 premiers entiers dans les cases du cube : le nombre de toutes les combinaisons possibles s'écrit avec plus de 200 chiffres ! Tous les ordinateurs du monde travaillant ensemble seraient bien incapables d'arriver au bout, même en plusieurs milliards d'années.

De l'ordre 3 à l'ordre 5

Pour réduire le nombre de cas à étudier, nous nous sommes tout d'abord intéressés au cube d'ordre 3. Nous avons déterminé par ordinateur un grand nombre de cubes d'ordre 3 ayant le nombre 63 en leur centre et tels que la somme des nombres placés dans les cases symétriques autour de ce centre soit égale à 126.

Pourquoi 126 ? Pour le comprendre, revenons au cube d'ordre 5 : il contient les 125 premiers entiers. Donc, pour

que la somme des entiers d'une ligne soit toujours la même, sachant qu'il y a 25 lignes, cette somme doit être égale au vingt-cinquième de la somme de ces 125 premiers entiers, c'est-à-dire à 315 (les nombres sont ainsi équitablement répartis entre les 25 lignes existantes). Puisque le nombre central du cube est 63, les nombres à placer sur les lignes, colonnes, piles et diagonales passant par ce centre doivent totaliser, en ne tenant pas compte de la case centrale, la différence entre 315 et 63, soit 252. On impose alors que deux cases diamétralement opposées du cube central totalisent, pour chaque alignement, la moitié de cette valeur, c'est-à-dire 126. Et les deux autres cases extérieures à ce cube central prolongeant l'alignement des cases doivent aussi totaliser 126.

Ainsi construit, chacun de ces cubes auxiliaires d'ordre 3 est partiellement magique. Sur les 49 alignements de 3 cases qui existent dans un cube d'ordre 3, 29 produisent la même somme, 189. En outre, les nombres ne sont pas limités de 1 à 27 (3^3) comme l'impose la définition du cube magique.

Une fois fixés les nombres dans le cube central, il reste à remplir, toujours par ordinateur, les 98 cases les plus extérieures : suite à la construction du cube central, cela fait donc encore utiliser 29 fois des nombres x et y tels que $x + y = 126$, à placer sur des cases opposées.

La mise en œuvre de cette méthode a nécessité plusieurs semaines de calcul, avec cinq ordinateurs, pour trouver notre cube. Plus de 80 000 petits cubes auxiliaires d'ordre 3 ont été examinés.

Si ce cube d'ordre 5 résout la question du plus petit cube magique parfait, de nombreuses questions sur les cubes magiques n'en demeurent pas moins en suspens. Parmi celles-ci, citons la recherche d'un cube bimagique parfait (c'est-à-dire restant magique parfait lorsque ses nombres sont élevés au carré) du plus petit ordre possible : le plus petit connu est d'ordre 32, on ignore s'il est ou non possible de faire mieux. On pourrait aussi passer à la quatrième dimension et étudier des hypercubes magiques. Ainsi, la recherche mathématique en amateur éclairé a encore de beaux jours devant elle, renouvelée qu'elle est par l'insatiable imagination de tous ses passionnés. ■ C. B

POUR EN SAVOIR PLUS

■ W.H. Benson et O. Jacoby, *Magic Cubes New Recreations*, Dover Publications, New York, 1981.

■ M. Gardner, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*, Freeman, New York, 1988.

■ C.A. Pickover, *The Zen of Magic Squares, Circles and Stars*, Princeton University Press, 2002.

■ www.multimagie.com

■ <http://mathworld.wolfram.com/topics/MagicFigures.html>

[2] Joseph Sauveur, *Construction générale des carrés magiques*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, 1710.