Quels sont les *plus petits* carrés magiques possibles ?

Douze énigmes pour gagner 8.000€ et douze bouteilles de champagne !

Communiqué de presse, 6 avril 2010, France.

Alors que les carrés magiques sont connus et étudiés depuis de longs siècles, il est étonnant que l'on ne sache toujours pas aujourd'hui, pour certains types de carrés magiques, quels sont les plus petits carrés possibles ! Par exemple, alors qu'Euler envoyait à Lagrange dès 1770 ce carré magique 4x4 de carrés :

68^2	29^2	41^2	37^2
17^2	31^2	79^2	32^2
59^2	28^2	23^2	61^2
11^2	77^2	8^2	49^2

Carré magique 4x4 de carrés, par Euler.
Un carré magique nxn utilise n^2 entiers distincts, et a la même somme S pour ses n lignes, ses n colonnes et ses 2 diagonales. Ici S = 8 515.

on ne sait toujours pas si un carré magique 3x3 de carrés est possible !

a^2	b^2	c^2
d^2	e^2	f^2
g^2	h^2	i^2

Personne n'a pu encore construire un carré magique 3x3 avec 9 entiers carrés distincts.

Aussi, pour faire avancer ces problèmes encore non résolus, douze prix totalisant 8.000€ + douze bouteilles de champagne sont offerts pour les solutions à douze énigmes réparties ainsi :

- 6 grandes énigmes, de 1.000€ chacune, totalisant 6.000€ + 6 bouteilles
- 6 petites énigmes, de 100€ à 500€ chacune, totalisant 2.000€ + 6 bouteilles

Bien sûr, seule la première personne qui aura résolu une énigme remportera le prix correspondant. Voici un résumé de ces énigmes, davantage détaillées dans les pages suivantes. Pour chaque énigme, il faut construire un exemple ou prouver l'impossibilité. Les petites énigmes sont entre parenthèses.

1. Carré magique 3×3 utilisant au moins sept entiers carrés, différent du seul exemple connu.
2. Carré bimagique 5x5.
3. Carré semi-magique 3x3 (7x7) de cubes.
4. Carré magique 4x4 (5x5, 6x6, 7x7) de cubes.
5. Cube magique multiplicatif utilisant des entiers < 364.
6. Carré magique 5x5 (6x6, 7x7) additif-multiplicatif.

Ces énigmes peuvent être mathématiquement réécrites en systèmes d'équation diophantiennes : par exemple, un carré magique 3x3 est un système de 8 équations à 10 inconnues (la 10ème inconnue étant la somme magique des 8 alignements).

Chaque énigme permettra de compléter le tableau ci-dessous avec le nom de la première personne qui l'aura résolu (et qui aura donc remporté le prix) : soit parce qu'il aura été le premier à construire un tel carré, soit parce qu'il aura été le premier à prouver que c'est impossible.

	Carrés magiques de carrés	Carrés bimagiques	Carrés semi-magiques de cubes	Carrés magiques de cubes	Carrés magiques add-mult
2x2	Impossible				
3x3	**Grande énigme #1 (1000€)***	Impossible. Prouvé par E Lucas, 1891	**Grande énigme #3 (1000€)**	Impossible	Impossible. Prouvé par L. Morgenstern, 2007
4x4	L. Euler, 1770	Impossible. Prouvé par L. Pebody / J.-C. Rosa**, 2004	L. Morgenstern, 2006	**Grande énigme #4 (1000€)**	
5x5	C. Boyer, 2004	**Grande énigme #2 (1000€)**	C. Boyer, 2004	**Petite énigme #4a (500€)**	**Grande énigme #6 (1000€)**
6x6	C. Boyer, 2005	J. Wroblewski, 2006	L. Morgenstern, 2006	**Petite énigme #4b (500€)**	**Petite énigme #6a (500€)**
7x7	C. Boyer***, 2005	L. Morgenstern, 2006	**Petite énigme #3a (100€)**	**Petite énigme #4c (200€)**	**Petite énigme #6b (200€)**
8x8	G. Pfeffermann***, 1890		L. Morgenstern, 2006	W. Trump, 2008	W. Horner, 1955
9x9	G. Pfeffermann***, 1891		L. Morgenstern - C. Boyer, 2006	C. Boyer***, 2006	W. Horner, 1952

* ou utilisant au moins 7 carrés sur ses 9 entiers, différent du seul exemple connu

** prouvé la même année, mais indépendamment

*** ces carrés utilisent des entiers consécutifs (ou des carrés consécutifs, ou des cubes consécutifs)

Pays: Suisse (Euler), Angleterre (Pebody), France (Pfeffermann, Lucas, Rosa, Boyer), Allemagne (Trump), Pologne (Wroblewski), USA (Horner, Morgenstern)

Tableau récapitulatif des énigmes et des premiers découvreurs.
La grande énigme #5 n'y figure pas : différente, elle est la seule à concerner les cubes magiques.

Les réponses aux énigmes sont à envoyer à Christian Boyer, cboyer@club-internet.fr.
Le site www.multimagie.com donne davantage de renseignements sur chaque énigme, et informera régulièrement des avancées reçues et des prix gagnés.

Avant que ces prix totalisant 8.000€ soient offerts, il y a eu des publications par Christian Boyer sur ces énigmes.
Par ordre chronologique :

www.multimagie.com Ce site *www.multimagie.com*, ouvert depuis 2002, détaille en français, anglais et allemand les premiers résultats des chercheurs sur ces problèmes, comme sur bien d'autres problèmes concernant les carrés, cubes et hypercubes magiques.

The Mathematical Intelligencer En 2005, trois grandes énigmes (les #1, #2, #4) faisaient partie des problèmes ouverts de l'article « Some Notes on the Magic Squares of Squares Problem » paru dans *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 27, n°2.

tangente En novembre 2007, la grande énigme #5 sur les cubes magiques multiplicatifs était soumise aux lecteurs du magazine mathématique *Tangente* n°119.

POUR LA SCIENCE En avril 2008, dans l'article « Enigmes sur les Carrés Magiques » paru dans le *Dossier Pour La Science* n°59 « Jeux Math », 100€ étaient offerts pour chacune des cinq premières grandes énigmes. Donc maintenant deux ans plus tard, une somme dix fois supérieure est offerte : 1.000€ chacune.

JIS Egalement en 2008, la grande énigme #4 était un problème non résolu cité en partie 8.3 de l'article « New Upper Bounds for Taxicab and Cabtaxi Numbers » paru dans *The Journal of Integer Sequences*, Vol. 11, n°1.

POUR LA SCIENCE.fr En avril-mai 2009, le site *www.pourlascience.fr* publiait dans sa rubrique « Jeux » les cinq premières grandes énigmes, puis la grande énigme #6 sur les carrés add-mult était rajoutée en juin 2009.

Avant de soumettre ces énigmes, Christian Boyer a résolu quelques problèmes sur les carrés magiques et cubes magiques :

POUR LA SCIENCE En 2001, il a construit avec André Viricel le premier carré pentamagique connu et l'a publié dans *Pour La Science*. Ce carré magique reste magique après avoir élevé au carré ses entiers, reste magique après avoir élevé au cube ses entiers, reste magique après avoir élevé à la puissance 4 ses entiers, et reste magique après avoir élevé à la puissance 5 ses entiers.

LA Recherche SCIENTIFIC AMERICAN En 2003, il a résolu avec Walter Trump le vieux problème du plus petit cube magique possible, et l'a publié dans *La Recherche*. De nombreux magazines dans le monde ont publié leur cube. Le problème avait été popularisé par Martin Gardner dans *Scientific American* en 1976, et initialement étudié par Pierre de Fermat dès 1640.

THE AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY En 2007, il a résolu le vieux problème du plus petit carré magique possible de nombres triangulaires, et a publié la solution dans *The American Mathematical Monthly*. Ce problème avait été initialement posé 66 ans plus tôt par Royal V. Heath, en 1941, aussi dans *The American Mathematical Monthly*.

« Quels sont les plus petits… ? »
Détail des 12 énigmes.

Quel sont les plus petits carrés magiques possibles de carrés : 3x3 ou 4x4 ?

En 1770, Leonhard Euler a été le premier à construire des carrés magiques 4x4 de carrés, comme indiqué plus haut. Mais personne n'a encore réussi à construire un carré magique 3x3 de carrés, ni à prouver que c'est impossible. Edouard Lucas a travaillé sur le sujet en 1876. Puis en 1996, Martin Gardner a offert 100$ au premier qui pourrait en construire un. Comme ce problème –pourtant d'apparence très simple– est incroyablement difficile à résoudre avec neuf entiers carrés distincts, voici une énigme qui devrait être plus simple :

- **Grande énigme #1 (1000€ + 1 bouteille).** Construire un carré magique 3×3 utilisant sept (ou huit, ou neuf) entiers carrés distincts différent du seul exemple connu et de ses rotations, symétries et multiples k^2. Ou prouver que c'est impossible.

373^2	289^2	565^2
360721	425^2	23^2
205^2	527^2	222121

Seul exemple connu de carré magique 3x3 utilisant sept entiers carrés distincts, par Andrew Bremner. S = 541 875.

Quels sont les plus petits carrés bimagiques possibles : 5x5 ou 6x6 ?

Un carré bimagique est un carré magique qui reste magique après que ses nombres aient été élevés au carré. Les premiers connus ont été construits par le français G. Pfeffermann en 1890 (8x8) et 1891 (9x9). Les bimagiques 3×3 et 4×4 sont mathématiquement prouvés impossibles. Les plus petits bimagiques actuellement connus sont des 6×6 dont les premiers ont été construits en 2006 par Jaroslaw Wroblewski, mathématicien de l'Université de Wroclaw, Pologne.

17	36	55	124	62	114
58	40	129	50	111	20
108	135	34	44	38	49
87	98	92	102	1	28
116	25	86	7	96	78
22	74	12	81	100	119

Carré bimagique 6x6, par Jaroslaw Wroblewski. S1 = 408, S2 = 36 826.

- **Grande énigme #2 (1000€ + 1 bouteille).** Construire un carré bimagique 5x5 utilisant des entiers positifs distincts. Ou prouver que c'est impossible.

Quels sont les plus petits carrés semi-magiques possibles de cubes : 3x3 ou 4x4 ?

Un carré semi-magique nxn est un carré qui a ses n lignes et n colonnes ayant la même somme, mais dont ses deux diagonales peuvent avoir des sommes quelconques. Les plus petits carrés semi-magiques actuellement connus de cubes sont des 4×4 construits en 2006 par Lee Morgenstern, mathématicien américain. On connaît aussi des carrés 5x5 et 6x6, puis 8x8 et 9x9, mais pas encore de 7x7.

16^3	20^3	18^3	192^3
180^3	81^3	90^3	15^3
108^3	135^3	150^3	9^3
2^3	160^3	144^3	24^3

Carré semi-magique 4x4 de cubes, par Lee Morgenstern. S = 7 095 816.

- **Grande énigme #3 (1000€ + 1 bouteille)**. Construire un carré semi-magique 3x3 utilisant des entiers positifs distincts élevés au cube. Ou prouver que c'est impossible.

- **Petite énigme #3a (100€ + 1 bouteille)**. Construire un carré semi-magique 7x7 utilisant des entiers positifs distincts élevés au cube. Ou prouver que c'est impossible.

Quels sont les plus petits carrés magiques possibles de cubes : 4x4, 5x5, 6x6, 7x7 ou 8x8 ?

Le premier carré magique connu de cubes a été construit par le français Gaston Tarry en 1905, grâce à un gros carré trimagique 128x128 (magique jusqu'à la puissance trois). Les plus petits carrés magiques actuellement connus de cubes sont des carrés 8x8 construits en 2008 par Walter Trump, professeur allemand de mathématiques. On ne connaît aucun 4x4, 5x5, 6x6 ou 7x7. Les 3x3 sont prouvés impossibles.

11^3	9^3	15^3	61^3	18^3	40^3	27^3	68^3
21^3	34^3	64^3	57^3	32^3	24^3	45^3	14^3
38^3	3^3	58^3	8^3	66^3	2^3	46^3	10^3
63^3	31^3	41^3	30^3	13^3	42^3	39^3	50^3
37^3	51^3	12^3	6^3	54^3	65^3	23^3	19^3
47^3	36^3	43^3	33^3	29^3	59^3	52^3	4^3
55^3	53^3	20^3	49^3	25^3	16^3	5^3	56^3
1^3	62^3	26^3	35^3	48^3	7^3	60^3	22^3

Carré magique 8x8 de cubes, par Walter Trump. S = 636 363.

- **Grande énigme #4 (1000€ + 1 bouteille)**. Construire un carré magique 4x4 utilisant des entiers positifs distincts élevés au cube. Ou prouver que c'est impossible.

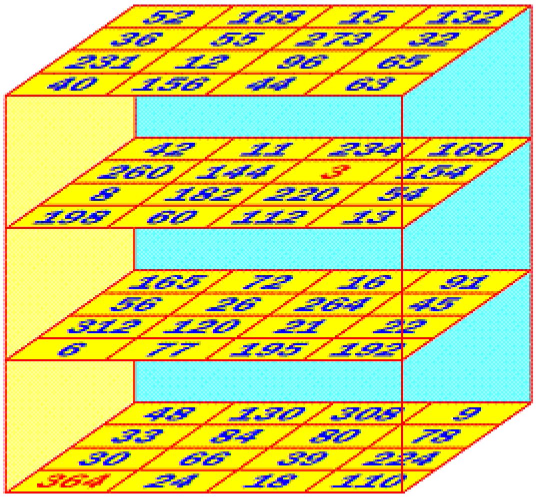
- **Petite énigme #4a (500€ + 1 bouteille)**. Construire un carré magique 5x5 utilisant des entiers positifs distincts élevés au cube. Ou prouver que c'est impossible.

- **Petite énigme #4b (500€ + 1 bouteille)**. Construire un carré magique 6x6 utilisant des entiers positifs distincts élevés au cube. Ou prouver que c'est impossible.

- **Petite énigme #4c (200€ + 1 bouteille)**. Construire un carré magique 7x7 utilisant des entiers positifs distincts élevés au cube. Ou prouver que c'est impossible. (*Lorsqu'un tel carré sera construit, si la petite énigme #3a du semi-magique 7x7 n'est pas encore résolue, alors la personne gagnera l'ensemble des deux prix, soit donc 300€ et 2 bouteilles au total*)

Quels sont les plus petit nombres permettant de construire un cube magique multiplicatif ?

Contrairement à toutes les autres énigmes qui concernent les carrés magiques, celle-ci concerne les cubes magiques. Un cube magique multiplicatif nxnxn est un cube dont ses n² lignes, n² colonnes, n² piles, et 4 grandes diagonales ont le même produit P. Aujourd'hui les meilleurs cubes magiques multiplicatifs sont des cubes 4x4x4 dont le plus grand nombre parmi les 64 entiers utilisés est égal à 364. On ne sait pas s'il est possible de construire un cube avec des nombres plus petits.



Cube magique multiplicatif 4x4x4, par Christian Boyer. Nb max = 364. P = 17 297 280.

- **Grande énigme #5 (1000€ + 1 bouteille).** Construire un cube magique multiplicatif dont les entiers positifs distincts utilisés sont tous strictement inférieurs à 364. La taille est libre : 3x3x3, 4x4x4, 5x5x5,… Ou prouver que c'est impossible.

Quels sont les plus petits carrés magiques additif-multiplicatifs possibles : 5x5, 6x6, 7x7 ou 8x8 ?

Un carré magique additif-multiplicatif nxn est un carré dont les n lignes, n colonnes et 2 diagonales ont la même somme S, mais aussi le même produit P. Les plus petits connus sont des carrés 8x8 dont le premier a été construit en 1955 par Walter Horner, professeur américain de mathématiques. Mais on ne connaît aucun 5x5, 6x6 ou 7x7. Les 3x3 et 4x4 sont prouvés impossibles.

162	207	51	26	133	120	116	25
105	152	100	29	138	243	39	34
92	27	91	136	45	38	150	261
57	30	174	225	108	23	119	104
58	75	171	90	17	52	216	161
13	68	184	189	50	87	135	114
200	203	15	76	117	102	46	81
153	78	54	69	232	175	19	60

Carré magique additif-multiplicatif 8x8, par Walter Horner.
S = 840, P = 2 058 068 231 856 000.

- **Grande énigme #6 (1000€ + 1 bouteille).** Construire un carré magique additif-multiplicatif 5x5 utilisant des entiers positifs distincts. Ou prouver que c'est impossible.

- **Petite énigme #6a (500€ + 1 bouteille).** Construire un carré magique additif-multiplicatif 6x6 utilisant des entiers positifs distincts. Ou prouver que c'est impossible.

- **Petite énigme #6b (200€ + 1 bouteille).** Construire un carré magique additif-multiplicatif 7x7 utilisant des entiers positifs distincts. Ou prouver que c'est impossible.

Contact : Christian Boyer, cboyer@club-internet.fr, France.