Was sind die *kleinstmöglichen* magischen Quadrate?

Zwölf Rätsel zum Gewinn von 8.000 € und zwölf Flaschen Champagner!

Presse Veröffentlichung, 06. April 2010, Frankreich

Obwohl magische Quadrate jahrhundertelang bekannt sind und studiert wurden, ist es überraschend, dass wir für einige Typen von magischen Quadraten bis heute nicht wissen, welche die kleinstmöglichen sind! Zum Beispiel sandte Euler bereits 1770 dieses magische 4x4-Quadrat an Lagrange:

68^2	29^2	41^2	37^2
17^2	31^2	79^2	32^2
59^2	28^2	23^2	61^2
11^2	77^2	8^2	49^2

Ein magisches 4x4-Quadrat aus Quadratzahlen von Euler.
Ein magisches nxn-Quadrat besteht aus n^2 unterschiedlichen Zahlen und hat die gleiche Summe S für seine n Zeilen, seine n Spalten und seine 2 Diagonalen. Hier ist S = 8.515.

Wir wissen immer noch nicht ob ein magisches 3x3-Quadrat aus Quadratzahlen möglich ist!

a^2	b^2	c^2
d^2	e^2	f^2
g^2	h^2	i^2

Niemand war bisher in der Lage ein magisches 3x3-Quadrat mit 9 unterschiedlichen Quadratzahlen zu konstruieren.

Um eine Lösung dieser Probleme zu beschleunigen, werden zwölf Preise im Gesamtwert von 8.000 € und zwölf Flaschen Champagner für Lösungen der Rätsel ausgesetzt. Die Preise setzen sich wie folgt zusammen:

- Sechs große Rätsel, jedes 1.000 €, zusammen 6.000 € und 6 Flaschen
- Sechs kleine Rätsel, jedes von 100 € bis 500 €, zusammen 2.000 € und 6 Flaschen

Natürlich gewinnt nur die erste Person, die eines der Rätsel löst den entsprechenden Preis. Auf den folgenden Seiten finden Sie eine Zusammenfassung der Rätsel mit weiteren Einzelheiten. Für jedes Rätsel müssen Sie ein Beispiel produzieren oder die Unmöglichkeit beweisen. Die kleinen Rätsel sind eingeklammert.

1. 3×3 magisches Quadrat mit mindestens sieben Quadratzahlen, unterschiedlich von dem einzigen bekannten Beispiel.
2. 5x5 bimagisches Quadrat.
3. 3x3 (7x7) semi-magisches Quadrat aus Kubikzahlen.
4. 4x4 (5x5, 6x6, 7x7) magisches Quadrat aus Kubikzahlen.
5. Multiplikativer magischer Würfel unter Verwendung ganzer Zahlen < 364.
6. 5x5 (6x6, 7x7) additives-multiplikatives magisches Quadrat.

Diese Rätsel können mathematisch als diophantisches Gleichungssystem geschrieben werden: Zum Beispiel besteht ein magisches 3x3-Quadrat aus 8 Gleichungen mit 10 Unbekannten (die zehnte Unbekannte ist die magische Konstante, also die Summe jeder Linie).

Jedes Rätsel erlaubt die Vervollständigung der nachfolgenden Tabelle mit den Namen der ersten Person, die das Rätsel gelöst hat (also den Preis gewinnt) entweder der Konstruktion solch eines Quadrates oder den Beweis der Unmöglichkeit.

	Magisches Quadrat aus Quadratzahlen	Bimagisches Quadrat	Semi-magisches Quadrat aus Kubikzahlen	Magisches Quadrats aus Kubikzahlen	Add-mult magisches Quadrats
2x2	Unmöglich				
3x3	**Großes Rätsel #1 (€1000)***	Unmöglich. Bewiesen von E Lucas, 1891	**Großes Rätsel #3 (€1000)**	Unmöglich	Unmöglich. Bewiesen von L. Morgenstern, 2007
4x4	L. Euler, 1770	Unmöglich. Bewiesen von L. Pebody / J.-C. Rosa**, 2004	L. Morgenstern, 2006	**Großes Rätsel #4 (€1000)**	
5x5	C. Boyer, 2004	**Großes Rätsel #2 (€1000)**	C. Boyer, 2004	**Kleines Rätsel #4a (€500)**	**Großes Rätsel #6 (€1000)**
6x6	C. Boyer, 2005	J. Wroblewski, 2006	L. Morgenstern, 2006	**Kleines Rätsel #4b (€500)**	**Kleines Rätsel #6a (€500)**
7x7	C. Boyer***, 2005	L. Morgenstern, 2006	**Kleines Rätsel #3a (€100)**	**Kleines Rätsel #4c (€200)**	**Kleines Rätsel #6b (€200)**
8x8	G. Pfeffermann***, 1890		L. Morgenstern, 2006	W. Trump, 2008	W. Horner, 1955
9x9	G. Pfeffermann***, 1891		L. Morgenstern - C. Boyer, 2006	C. Boyer***, 2006	W. Horner, 1952

* oder mit zumindest sieben quadrierten Zahlen, unterschiedlich von dem einzigen bekannten Beispiel.

** bewiesen im gleichen Jahr, aber unabhängig von einander

***diese Quadrate verwenden aufeinander folgende Zahlen (oder aufeinander folgende Quadratzahlen, oder aufeinander folgende Kubikzahlen)

Länder: Schweiz (Euler), England (Pebody), Frankreich (Pfeffermann, Lucas, Rosa, Boyer), Deutschland (Trump), Polen (Wroblewski), USA (Horner, Morgenstern)

Übersichtstabelle der Probleme und ihrer ersten Lösungen.
Das große Rätsel #5 erscheint hier nicht, weil es das einzige über magisches Würfel ist.

Die Lösung eines Rätsels muss gesendet werden an Christian Boyer, cboyer@club-internet.fr.
Die Internetseite www.multimagie.com enthält mehr Informationen über jedes Rätsel, und wird regelmäßige Updates über die erzielten Fortschritte und gewonnenen Preise enthalten.

Bevor diese Preise im Gesamtwert von €8,000 angeboten wurden, gab es Veröffentlichungen von Christian Boyer über diese Rätsel. In chronologischer Zeilenfolge:

Die *www.multimagie.com* website, 2002 eröffnet, enthält Einzelheiten in französicher, englischer und deutscher Sprache und die ersten Ergebnisse bei der Suche nach diesen Problemen, sowie vieler weiterer Probleme im Zusammenhang mit magischen Quadraten, Würfeln und Hyperwürfeln.

In 2005, waren die drei großen Rätsel (#1, #2, #4) ein Teil der offenen Probleme im Artikel “Some Notes on the Magic squares of Squares Problem” veröffentlicht in *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 27, Ausg. 2.

Im November 2007 wurde das große Rätsel #5 über multiplikative magische Würfel für die Leser des mathematischen französischen Magazins *Tangente* Nummer 119 veröffentlicht.

Im April 2008 wurde der Artikel “Enigmes sur les Carrés Magiques” in *Dossier Pour La Science* Ausgabe 59 “Jeux Math”, (*Pour La Science* ist die französiche Edition von *Scientific American*) veröffentlicht, in der €100 für die Lösung der ersten fünf großen Rätsel geboten wurden. Jetzt, zwei Jahre später, wird eine zehnmal so große Summe geboten: €1,000 für jedes Rätsel.

Ebenfalls in 2008, wurde das große Rätsel #4 als ungelöstes Problem im Abschnitt 8.3 im Artikel “New Upper Bounds for Taxicab and Cabtaxi Numbers” in *The Journal of Integer Sequences*, Vol. 11, Ausgabe 1 veröffentlicht..

Im April-May 2009 veröffentlichte *www.pourlascience.fr* auf ihrer webseite die ersten fünf große Rätsel in ihrer “Games” Kolumne (“Jeux” in französisch). große Rätsel #6 über additive-multiplikative Quadrate wurde danach im Juni 2009 publiziert.

Bevor Christian Boyer diese Rätsel einsandte löste er einige Probleme im Zusammenhang mit magischen Quadraten und magischen Würfeln:

Im Jahr 2001 konstruierte er zusammen mit André Viricel das erste bekannte pentamagische Quadrat und veröffentlichte es in *Pour La Science*. Dieses magische Quadrat bleibt magisch nach dem quadrieren seiner Zahlen, bleibt magisch nachdem seine Zahlen in die dritte Potenz erhoben wurden, bleibt magisch nachdem seine Zahlen in die vierte Potenz erhoben wurden und bleibt magisch nachdem seine Zahlen in die fünfte Potenz erhoben wurden.

Im Jahr 2003 löste er zusammen mit Walter Trump das alte Problem des kleinsten möglichen perfekten magischen Würfels und veröffentlichte es in *La Recherche*. Zahlreiche Magazine in der ganzen Welt veröffentlichten ihren Würfel. Das Problem hatte Martin Gardner 1976 in *Scientific American* bekannt gemacht und ursprünglich studierte es Pierre de Fermat bereits 1640.

Im Jahr 2007 löste er das alte Problem des kleinsten möglichen Quadrates bestehend aus Dreieckszahlen und veröffentlichte die Lösung in *The American Mathematical Monthly*. Dieses Problem wurde vor 66 Jahren von Royal V. Heath gestellt, also 1941, ebenfalls in *The American Mathematical Monthly*.

“Was sind die kleinsten…?”
Einzelheiten der 12 Rätsel.

Was sind die kleinsten möglichen magischen Quadrate aus den Quadratzahlen: 3x3 oder 4x4?

1770 war Leonhard Euler der erste der erfolgreich ein 4x4 magisches Quadrat aus Quadratzahlen konstruierte, wie oben erwähnt. Aber keiner konnte erfolgreich ein 3x3 magisches Quadrat aus Quadratzahlen konstruieren oder beweisen dass es unmöglich ist. Edouard Lucas arbeitete 1876 an dieser Aufgabe. Dann bot 1996 Martin Gardner $100 dem Ersten, der solch ein Quadrat erzeugen konnte. Doch dieses Problem – trotz seiner sehr einfachen Erscheinung – ist unglaublich schwer mit neun unterschiedlichen Quadratzahlen zu lösen, deshalb ist hier ein Rätsel das einfacher sein sollte:

- **Großes Rätsel #1 (€1000 und 1 Flasche)**. Konstruieren Sie ein 3x3 magisches Quadrat, verwenden Sie dabei sieben (oder acht, oder neun) verschiedene Quadratzahlen, die sich wesentlich vom einzigen bekannten Beispiel unterscheiden: keine Rotationen, Spiegelungen und k^2-Vielfache. Oder beweisen Sie, dass es unmöglich ist.

373^2	289^2	565^2
360721	425^2	23^2
205^2	527^2	222121

Einziges bekanntes Beispiel eines 3x3 magischen Quadrates bestehend aus sieben verschiedenen Quadratzahlen, von Andrew Bremner. S = 541.875.

Was sind die kleinsten möglichen bimagischen Quadrate: 5x5 oder 6x6?

Ein bimagisches Quadrat ist ein magisches Quadrat welches magisch bleibt nachdem man seine Zahlen quadriert hat. Die ersten bekannten Quadrate wurde von dem Franzosen G. Pfeffermann 1890 (8x8) und 1891 (9x9) konstruiert. Ein 3x3 und 4x4 bimagisches Quadrat wurde mathematisch als unmöglich bewiesen. Das im Augenblick kleinste bekannte bimagische Quadrat ist 6x6, das erste wurde 2006 von Jaroslaw Wroblewski, einem Mathematiker der Wroclaw University, Polen konstruiert.

17	36	55	124	62	114
58	40	129	50	111	20
108	135	34	44	38	49
87	98	92	102	1	28
116	25	86	7	96	78
22	74	12	81	100	119

Ein 6x6 bimagisches Quadrat von Jaroslaw Wroblewski. S1 = 408, S2 = 36,826.

- **Großes Rätsel #2 (€1000 und 1 Flasche)**. Konstruieren Sie ein 5x5 bimagisches Quadrat mit unterschiedlichen positiven Zahlen oder beweisen Sie dass es unmöglich ist.

Was sind die kleinsten möglichen semi-magisches Quadrats aus den Kubikzahlen: 3x3 oder 4x4?

Ein nxn semi-magisches Quadrat ist ein Quadrat dessen n Zeilen und n Spalten die gleiche Summe haben, aber die Diagonalen jede Summe haben können. Das kleinste bekannte semi-magische Quadrat aus Kubikzahlen ist im Augenblick ein 4×4 Quadrat, das 2006 von Lee Morgenstern, einem amerikanischen Mathematiker konstruiert wurde. Wir kennen ebenso 5x5 und 6x6 Quadrate, dann 8x8 und 9x9, aber noch kein 7x7 Quadrat.

16^3	20^3	18^3	192^3
180^3	81^3	90^3	15^3
108^3	135^3	150^3	9^3
2^3	160^3	144^3	24^3

Ein 4x4 semi-magisches Quadrat aus Kubikzahlen von Lee Morgenstern. S = 7,095,816.

- **Großes Rätsel #3 (€1000 und 1 Flasche)**. Konstruieren Sie ein 3x3 semi-magisches Quadrat unter Verwendung unterschiedlicher positiver Kubikzahlen, oder beweisen Sie, dass es unmöglich ist.
- **Kleines Rätsel #3a (€100 und 1 Flasche)**. Konstruieren Sie ein 7x7 semi-magisches Quadrat unter Verwendung unterschiedlicher positiver Kubikzahlen, oder beweisen Sie, dass es unmöglich ist.

Was sind die kleinsten möglichen magischen Quadrate aus den Kubikzahlen: 4x4, 5x5, 6x6, 7x7 oder 8x8?

Das erste bekannte magische Quadrat aus Kubikzahlen wurde von dem Franzosen Gaston Tarry 1905 konstruiert, basierend auf einem großem 128x128 trimagischen Quadrat (magisch bis zur dritten Potenz). Das zur Zeit kleinste bekannte magische Quadrat aus Kubikzahlen ist ein 8x8 Quadrat, das 2008 von Walter Trump, einem deutschen Mathematiklehrer konstruiert wurde. Wir kennen kein 4x4, 5x5, 6x6 oder 7x7 Quadrat. Das 3x3 Quadrat ist als unmöglich bewiesen.

11^3	9^3	15^3	61^3	18^3	40^3	27^3	68^3
21^3	34^3	64^3	57^3	32^3	24^3	45^3	14^3
38^3	3^3	58^3	8^3	66^3	2^3	46^3	10^3
63^3	31^3	41^3	30^3	13^3	42^3	39^3	50^3
37^3	51^3	12^3	6^3	54^3	65^3	23^3	19^3
47^3	36^3	43^3	33^3	29^3	59^3	52^3	4^3
55^3	53^3	20^3	49^3	25^3	16^3	5^3	56^3
1^3	62^3	26^3	35^3	48^3	7^3	60^3	22^3

Ein 8x8 magisches Quadrat aus Kubikzahlen von Walter Trump. S = 636,363.

- **Großes Rätsel #4 (€1000 und 1 Flasche)**. Konstruieren Sie ein 4x4 magisches Quadrat, verwenden Sie positive Kubikzahlen. Oder beweisen Sie, dass es unmöglich ist.

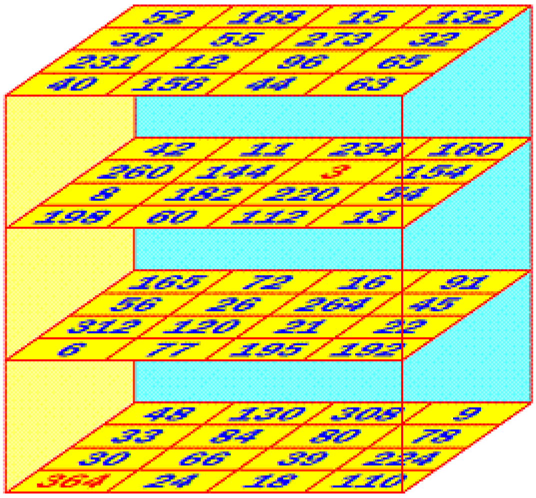
- **Kleines Rätsel #4a (€500 und 1 Flasche)**. Konstruieren Sie ein 5x5 magisches Quadrat, verwenden Sie positive Kubikzahlen. Oder beweisen Sie, dass es unmöglich ist.

- **Kleines Rätsel #4b (€500 und 1 Flasche)**. Konstruieren Sie ein 6x6 magisches Quadrat, verwenden Sie positive Kubikzahlen. Oder beweisen Sie, dass es unmöglich ist.

- **Kleines Rätsel #4c (€200 und 1 Flasche)**. Konstruieren Sie ein 7x7 magisches Quadrat, verwenden Sie positive Kubikzahlen. Oder beweisen Sie, dass es unmöglich ist. (*Falls solch ein Quadrat konstruiert wird, und Kleines Rätsel #3a des 7x7 semi-magisches noch nicht gelöst ist, erhält diese Person beide Preise – das bedeutet €300 und 2 Flaschen.*)

Was sind die kleinsten Zahlen um einen multiplikativen magischen Würfel zu konstruieren?

Konträr zu allen anderen Rätseln, bei denen es um magische Quadrate geht, handelt es hier um magische Würfel. Ein nxnxn multiplikativer magischer Würfel ist ein Würfel, bei dem seine n² Zeilen, n² Spalten, n² Säulen, und die 4 Hauptdiagonalen das gleiche Produkt P haben. Heutzutage ist der beste multiplikative magische Würfel ein 4x4x4 Würfel in dem die größte der 64 verwendeten Zahlen 364 ist. Wir wissen nicht ob es möglich ist einen Würfel mit kleineren Zahlen zu konstruieren.



Ein 4x4x4 multiplikativer magischer Würfel von Christian Boyer. Größte Zahl = 364. P = 17,297,280.

- **Großes Rätsel #5 (€1000 und 1 Flasche)**. Konstruieren Sie einen magischen Würfel in dem alle verschiedenen positiven Zahlen eindeutig kleiner als 364 sind. Die Größe kann beliebig sein: 3x3x3, 4x4x4, 5x5x5,…. Oder beweisen Sie, dass es unmöglich ist.

Was sind die kleinsten möglichen additiv-multiplikativen magischen Quadrate: 5x5, 6x6, 7x7 oder 8x8?

Ein nxn additives-multiplikatives magisches Quadrat ist ein Quadrat in dem seine n Zeilen, n Spalten und 2 Diagonalen die gleiche Summe S haben, und ebenfalls das gleiche Produkt P. Die kleinsten bekannten sind 8x8 Quadrate, das erste wurde 1955 von Walter Horner, einen amerikanischen Mathematiklehrer konstruiert. Wir kennen keine 5x5, 6x6 oder 7x7 Quadrate. Es wurde bewiesen dass es keine 3x3 und 4x4 Quadrate geben kann.

162	207	51	26	133	120	116	25
105	152	100	29	138	243	39	34
92	27	91	136	45	38	150	261
57	30	174	225	108	23	119	104
58	75	171	90	17	52	216	161
13	68	184	189	50	87	135	114
200	203	15	76	117	102	46	81
153	78	54	69	232	175	19	60

Ein 8x8 additives-multiplikatives magisches Quadrat von Walter Horner.
S = 840, P = 2,058,068,231,856,000.

- **Großes Rätsel #6 (€1000 und 1 Flasche)**. Konstruieren Sie ein 5x5 addit.-multiplikatives magisches Quadrat mit unterschiedlichen positiven Zahlen. Oder beweisen Sie, dass es unmöglich ist.

- **Kleines Rätsel #6a (€500 und 1 Flasche)**. Konstruieren Sie ein 6x6 additives-multiplikatives magisches Quadrat mit unterschiedlichen positiven Zahlen. Oder beweisen Sie, dass es unmöglich ist.

- **Kleines Rätsel #6b (€200 und 1 Flasche)**. Konstruieren Sie ein 7x7 additives-multiplikatives magisches Quadrat mit unterschiedlichen positiven Zahlen. Oder beweisen Sie, dass es unmöglich ist.

Kontakt: Christian Boyer, cboyer@club-internet.fr, Frankreich.